ПРОГРАММА
2 и 3 этапов
ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА В МАГИСТРАТУРУ
по направлению 01.04.01 «Математика»

В ходе второго и третьего этапов вступительного экзамена оцениваются знания и умения по разделам «Математический анализ», «Алгебра», «Геометрия», «Топология», «Дифференциальные уравнения», «Теория вероятности», «Функции комплексного переменного», «Вычислительная математика», «Логика», «Дискретная математика», «Теория чисел»; выявляется степень сформированности компетенций, значимых для успешного обучения в магистратуре по данному направлению.

Содержание основной части вступительного испытания

1. Пределы числовых последовательностей и функций.
2. Дифференциальное исчисление функций.
3. Числовые ряды. Признаки сходимости рядов. Абсолютная и условная сходимость.
4. Кратные интегралы. Криволинейные и поверхностные интегралы.
5. Векторный анализ.
6. Вариационное исчисление.
7. Основные понятия линейной алгебры.
8. Основные понятия теории множеств.
9. Основные понятия теории чисел.
10. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
11. Системы дифференциальных уравнений.
12. Основные понятия теории вероятности.
13. Функции комплексного переменного.
14. Численные методы.
15. Логика высказываний и предикатов.

Содержание дополнительной части вступительного испытания

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. Пределы числовых последовательностей и функций. Лемма Больцано – Вейерштрасса.
2. Непрерывность функций (одной и нескольких переменных).
3. Теорема Вейерштрасса. Теоремы Больцано - Коши.
4. Дифференцируемость функций (одной и нескольких переменных). Дифференцируемость сложной функции.

5. Теорема об обратной функции.

6. Теорема о неявной функции.

7. Первообразные и их свойства.

8. Интеграл Римана. Теорема Дарбу. Теорема Ньютона-Лейбница.

9. Числовые ряды. Признаки сходимости рядов. Абсолютная и условная сходимость.

10. Функциональные последовательности и ряды; непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса.

11. Ряды Фурье. Теорема Дирихле.

12. Кратные интегралы. Сведение к повторным.

13. Криволинейные и поверхностные интегралы. Векторный анализ. Теорема Стокса (формулы Грина, Гаусса-Остроградского, Стокса).

14. Теория меры.

15. Интеграл Лебега.

16. Банаховы и гильбертовы пространства.

17. Линейные ограниченные операторы.

18. Бесконечномерный нелинейный анализ. Неподвижные точки.

19. Конечномерные задачи на экстремум.

20. Экстремумы с ограничениями равенствами. Принцип множителей Лагранжа.

21. Экстремумы с ограничениями неравенствами. Теорема Куна – Таккера.

22. Вариационное исчисление. Уравнение Эйлера. Условия трансверсальности.

23. Ограничения равенства и неравенства.

АЛГЕБРА. ГЕОМЕТРИЯ. ТОПОЛОГИЯ.

1. Матрицы. Определители. Многочлены. Основная теорема алгебры.

2. Основные алгебраические структуры (группы, кольца, поля).

3. Подгруппа. Теорема Лагранжа. Циклические группы. Факторгруппы. Теорема о гомоморфизмах.

4. Кольцо многочленов. Разложение в произведение неприводимых.

5. Линейные пространства (базис, размерность). Теорема о ранге матрицы.

6. Линейные преобразования. Матрица линейного преобразования. Собственные векторы. Характеристический многочлен.

7. Системы линейных уравнений. Теорема Крамера. Теорема Кронекера-Капелли.

8. Билинейные и квадратичные формы. Матрица билинейной формы. Нормальный вид. Закон инерции.

9. Евклидовы пространства. Ортогонализация.

10. Квадратичные формы – приведение к главным осям.

11. Аффинная и метрическая классификация кривых и поверхностей второго порядка.

12. Проективная классификация кривых второго порядка.

13. Кривые и поверхности. Формулы Френе. Кривизна. Кручение.

14. Первая и вторая квадратичные формы поверхности.

15. Нормальная кривизна линии на поверхности. Теорема Менье.

16. Главные направления и главные кривизны. Формула Эйлера.

17. Одномерные и двумерные многообразия.

18. Топологические пространства.

19. Дифференцируемые многообразия.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши.

2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

3. Уравнения высших порядков и системы дифференциальных уравнений. Нормальные системы. Задача Коши.

4. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений.

5. Линейные уравнения и системы. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского.

6. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами и их фундаментальные системы решений.

7. Краевые задачи для уравнений второго порядка.

8. Устойчивость решений системы линейных дифференциальных уравнений.

9. Уравнения в частных производных первого порядка. Характеристики.

10. Уравнения в частных производных второго порядка.

11. Вывод уравнения колебания струны

12. Вывод уравнения теплопроводности

13. Классификация уравнений второго порядка на плоскости

14. Корректность задачи Коши для уравнения колебаний струны (формула Даламбера).

15. Задача Коши для волнового уравнения в **R**3, формула Кирхгофа.

16. Задача Коши – Дирихле для уравнения теплопроводности, метод Фурье.

17. Фундаментальные решения уравнения Лапласа в **R**3.

18. Формулы Грина.

19. Свойства гармонических функций (принцип максимума, теорема о среднем)

20. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре (метод отражений)

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

1. Случайные события. Вероятность. Теорема Бернулли.

2. Случайные величины. Законы распределения и формы их задания.

3. Числовые характеристики (характеристики положения, рассеяния и связи).

4. Неравенство Чебышёва. Законы больших чисел.

5. Предельные теоремы (теоремы Ляпунова, Муавра-Лапласа).

6. Случайные процессы. Теорема Колмогорова.

7. Стационарные процессы. Корреляционная теория. Теорема Бохнера-Хинчина. Спектральная теорема.

8. Марковские процессы. (Марковские цепи, Диффузионные процессы). Прямое и обратное уравнения Колмогорова.

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Функции комплексного переменного. Дифференцируемость, аналитичность, голоморфность. Условия Коши – Римана – Даламбера - Эйлера. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.

2. Основные элементарные функции и конформные отображения.

3. Интегральная теорема Коши. Интегральная формула Коши.

4. Ряд Лорана.

5. Особые точки.

6. Нули, полюсы – принцип аргумента.

7. Вычеты.

8. Использование вычетов при вычислении определенных интегралов.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

1. Интерполяция.

2. Численные методы линейной алгебры (решение систем линейных уравнений) – метод Гаусса и его модификации, метод простой итерации, метод квадратного корня.

3. Численные квадратуры. Численное дифференцирование.

4. Итерационные процессы (сходимость, устойчивость).

5. Основные разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Явные и неявные схемы. Аппроксимация. Сходимость. Устойчивость.

ЛОГИКА. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

1. Логика высказываний и предикатов.

2. Сочетания и мощности конечных множеств.

3. Полиномиальная формула. Числа Стирлинга первого и второго рода. Рекуррентные соотношения, их определяющие.

4. Комбинаторное свойство чисел Стирлинга второго рода. Минимальное остовное дерево взвешенного графа.

5. Жадный алгоритм. Эйлеровы графы. Критерий эйлеровости. Алгоритм поиска эйлерова цикла. Задача о кенигсбергских мостах. Транспортные сети. Задача о максимальном потоке. Полный поток. Разрезы. Теорема Форда - Фалкерсона.

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1. Основная теорема арифметики.

2. Иррациональность числа е.

3. Критерий Эйлера для квадратичных вычетов и невычетов.

4. Закон взаимности квадратичных вычетов.

5. Теорема Лиувилля. Существование трансцендентных чисел.

Библиографический список

1. Архипов, Г.И., Садовничий, В.А., Чубариков, В.Н. Лекции по математическому анализу. – М., 2000.

2. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. - М.: Наука, 1969. – 408 с.

3. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.-Л., Гостехиздат, 1952. — 180 с.

4. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Книга 1 и 2.

5. Владимиров B.C. Уравнения математической физики. Учебник для физич. и механико-математ. спец. вузов. — 4-е изд., испр. и доп. — М.: Наука, 1981. — 512 с.

6. Воеводин, В.В. Линейная алгебра. – М., 1980.

7. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Физматлит, 1961

8. Гнеденко, Б.В. Курс теории вероятностей и математической статистики. – М., 1982.

9. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 13-е изд., испр., М.: Изд-во ЧеРо, изд-во Московского университета, 1997. - 625 с.

10. Ильин, В.А., Позняк, Э.Г. Аналитическая геометрия. – М., 1968.

11. Ильин, В.А., Позняк, Э.Г. Линейная алгебра. – М., 1974.

12. Канатников А.Н., Крищенко А.П., Четвериков В.Н. Дифференциальное исчисление функций многих переменных: Учеб. для вузов / Под ред. B.C. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 456 с.

13. Колмогоров, А.Н., Фомин, С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М., 1981.

14. Кострикин, А.И. Введение в алгебру. – М., 1977.

15. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа. – М., 1989.
16. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры . М.: Наука, 1975 г.
17. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. - 407 с.
18. Люстерник Л. А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высш. школа, 1982. - 271 с.
19. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Высшая школа, 1967.— 565 с.
20. Моисеев Н.Н., ИваниловЮ.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. — М.: Наука, 1978. — 351 с.
21. Морозова, В.Д. Теория функций комплексного переменного. – М., 2000.
22. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. - 480 с.
23. Пензов, Ю.Е. Аналитическая геометрия. – Саратов, 1978.
24. Понтрягин. Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения (4-е изд.). М.: Наука, 1974.
25. Пугачев, В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М., 1979.
26. Рудин, У. Основы математического анализа. – М., 1966.
27. Севастьянов, Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. – М., 1982.
28. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. (4-е изд.). М.: Наука, 1966.
29. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения.
30. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. (5-е изд.). М.: Наука, 1977.
31. Уорнер Ф., Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М.: «Мир», 1987. — 304 с.
32. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. Т. 1-2. – М., 1990.
33. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969.